Université de Versailles - Saint Quentin **Année 2018/2019**
L3 Algèbre **Maria Chlouveraki**

Anneaux intègres et homomorphismes d'anneaux - TD 3

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

2. Montrer que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$.

3. Montrer que $\mathbb{R}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{R}$.

4. Montrer que $\mathbb{R}[i] = \mathbb{C}$.

5. Soit R un anneau. Montrer que R est intègre si et seulement si $R[x]$ est intègre. Si R est un corps, est-ce que $R[x]$ est un corps ?

6. Montrer que la composition des homomorphismes d'anneaux est aussi un homomorphisme d'anneaux.

7. Montrer que $f : \mathrm{Diag}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2\,,\, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$ est un isomorphisme d'anneaux.

8. Montrer que $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a, b) \mapsto a$ est un homomorphisme d'anneaux. Est-ce que f est un isomorphisme ?

9. Soit $f : R \to S$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que :
(a) $\mathrm{Im} f$ est un sous-anneau de S.
(b) $\mathrm{Ker} f$ est n'est pas un sous anneau de R.

10. Soit $f : R \to S$ un isomorphisme d'anneaux. Montrer que R est un anneau intègre (respectivement un corps) si et seulement si S est un anneau intègre (respectivement un corps).

11. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Posons
$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$ et $(a, b) \times (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$.
Nous avons montré que que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ sont des anneaux. Est-ce que les deux anneaux sont isomorphes ? Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

12. Est-ce que les anneaux $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont isomorphes ?